CENTRO INTERNAZIONALE DI STUDI ROSMINIANI
SIMPOSI ROSMINIANI

Quindicesimo Corso dei “Simposi Rosminiani”:
Uomini, animali o macchine?
Scienze, filosofia e teologia per un “nuovo umanesimo”
Stresa, Colle Rosmini, 27-30 agosto 2014

Scienza, tecnica e homo sapiens sapiens. *Riflessioni sulla matematica*

GIANDOMENICO BOFFI[1]

[La presente bozza di relazione deve ancora essere rivista e corretta dall’Autore per gli Atti. NdR].

Inizio con una precisazione sui termini del titolo.

Per me “scienza” si riferisce alle cosiddette *scienze dure* (dall’espressione inglese *hard sciences*), cioè la fisica, la chimica, la biologia, etc. L’esclusione delle cosiddette scienze sociali e scienze umane non è dovuta a scarsa considerazione per esse, ma è funzionale al mio discorso. La matematica, alla pari dell’informatica, è anch’essa generalmente inclusa tra le scienze dure; queste ultime, d’altra parte, sono spesso ritenute caratterizzate proprio dall’interazione tra modello matematico e verifica sperimentale.

In realtà non tutte le scienze dure sono “matematizzate” nella stessa misura, né è chiaro se lo saranno di più in avvenire. Certamente è del tutto matematizzata la fisica e il considerevole prestigio sociale odierno della scienza ha le sue radici proprio nel successo della matematizzazione della fisica dal tempo di Galileo Galilei ad oggi[2].

1. Ordinario di Algebra, Università degli Studi Internazionali di Roma – UNINT.
L’autore ringrazia l’Area di Ricerca SEFIR per le tante occasioni di approfondimento che gli ha offerto nel corso degli ultimi quindici anni. Per alcune informazioni sull’Area di Ricerca SEFIR, si veda la voce Aree di Ricerca della pagina web: http://www.ecclesiamater.org/.
2. È chiaro che anche l’informatica è molto matematizzata, perché è figlia della matematica (o propriamente è una parte del-

Il prestigio sociale della scienza, naturalmente, non dipende solo dalla capacità che essa ha di influenzare in modo importante la nostra visione del mondo[3], ma anche (forse soprattutto, in tempi utilitaristici come i nostri) dalla capacità di influenzare le nostre condizioni di vita in una maniera ritenuta generalmente positiva[4]: a questo allude il termine "tecnica" inserito nel mio titolo.

Senza entrare adesso in dettagli terminologici su scienza applicata, tecnica o tecnologia, ingegneria, etc., mi limito a dire, per fissare le idee, che per me "tecnica" si riferisce a qualunque saper fare. Non è corretto dire, sia in riferimento all'oggi che al passato, che tutta la tecnica sia di origine scientifica, ma certo la tecnica contemporanea è strettamente collegata alle scienze dure, in un rapporto vicendevole. Le conoscenze scientifiche alimentano la tecnica e l'indagine scientifica si avvale di sofisticate apparecchiature tecniche[5].

A mio parere il legame tra scienza e tecnica non è né accidentale, né limitato al nostro tempo, anche se oggi appare più vistoso. Non è limitato al nostro tempo perché, ad esempio, le osservazioni astronomiche degli antichi Babilonesi erano rese possibili dalla capacità di costruire adeguate torri di osservazione. Non è accidentale perché l'indagine scientifica cercherà sempre di avvalersi di tutto quel che sappiamo fare[6] e, viceversa, il sapere scientifico non potrà non influenzare la peculiare maniera con cui la specie umana si adatta all'ambiente circostante, e cioè cercando di adattarlo a se stessa. E con questo do anche ragione dell'enfasi posta nel mio titolo su *homo sapiens sapiens*[7].

È mia convinzione che una connotazione scientifico-tecnica sia costitutiva di *homo sapiens sapiens*, alla pari e con la stessa dignità delle altre sue connotazioni comunemente accettate. E ritengo che le macchine ci rivelino molto dell'interiorità di *homo sapiens sapiens*.

In particolare, credo che l'essere umano sia un animale matematico (*anche* un animale matematico, non esclusivamente tale, beninteso) e che le macchine da esso ideate siano (anche) una materializzazione della matematicità del suo animo.

Nel corso dell'articolo cercherò di fare due cose:

(I) illustrare sommariamente il ruolo della matematica nella scienza contemporanea, essenzialmente la fisica;

---

la matematica, dicono alcuni, almeno se ci si limita all'informatica teorica), ma qui interessa il rapporto tra matematica e discipline sperimentali. Nel seguito sorvolerò anche sul ruolo importantissimo e oramai scontato che ha l'elaborazione elettronica nel lavoro scientifico; volendo può interpretarsi tale ruolo come un altro modo attraverso il quale la matematica opera indirettamente nelle scienze dure.

3. L'influenza è in realtà reciproca. La visione del mondo di un'epoca influisce a sua volta sulla comunità scientifica, sui suoi obbiettivi, sui suoi metodi, sui suoi gusti, in una circolarità permanente. In larga misura la scienza cerca di rispondere agl'interrogativi della sua epoca. Per inciso osservo che a mio parere è scorretta la diffusa idea secondo cui la scienza spiega il *come* della cose e altri spiegano il *perché*. Nell'ambito di quel che le è accessibile, la scienza è in grado di avere un accesso diretto a qualche forma di perché veritativo. In questo risiede il suo più autentico valore umano. Qui si radica l'esperienza di gioia e libertà, ai confini del mistero, provata da tanti scienziati.

4. Specialmente nelle parti più privilegiate del pianeta, invero si rileva talvolta un atteggiamento non così positivo nei confronti dell'influsso esercitato dalla scienza sulle condizioni di vita. Si enfatizza la negatività di alcune conseguenze particolari, dimenticando i notevoli benefici di cui si fruisce, anche solo nel confronto con la generazione dei nostri nonni.

5. La coppia "scienza e tecnica" non ha niente a che vedere con la parola "tecnoscienza", un termine filosofico e sociologico usato in studi sul contesto socioculturale in cui si collocano scienza e tecnica. Tanto è vero che in nessuna università del mondo esistono dipartimenti di tecnoscienze fisiche, tecnoscienze chimiche, etc.

6. Questo naturalmente non vuol dire che tutto sia lecito al ricercatore all'opera nel suo laboratorio. Persino un'assemblea condominiale può proibire a uno scienziato di condurre nella sua proprietà individuale degli esperimenti su esplosivi innovativi!

7. *Homo sapiens sapiens* è il termine con cui è designata in paleoantropologia la (sotto-)specie umana cui apparteniamo. Il concetto di *homo sapiens sapiens* influenza e riflette la nostra attuale comprensione della storia dell'evoluzione biologica (cfr. la circolarità di cui nella nota 4).

CENTRO INTERNAZIONALE DI STUDI ROSMINIANI – VILLA DUCALE, CORSO UMBERTO I, n. 15
28838 STRESA VB (ITALIA) – C.F. 81000230067 – TEL. 0323 30091 - FAX 0323 31623 E–mail: simposi.rosminiani@rosmini.it

(II) illustrare sommariamente il legame tra matematica e natura umana[8].

* * * * *

Se chiedessi al lettore "L'universo è sempre esistito?", la risposta sarebbe probabilmente negativa. Tutti sappiamo che la teoria scientifica oggi più accreditata al riguardo è quella del *Big Bang*, secondo la quale il cosmo ha avuto inizio in un preciso istante in cui tutta la materia era concentrata in un solo punto, e dal quel momento l'universo si va espandendo[9]. Eppure per tempi lunghissimi e fino a non molti decenni fa l'opinione comune fu diversa o comunque divisa. Ciò conferma l'influenza della scienza sulla nostra visione del mondo. Tuttavia non è questo il punto adesso. Il punto è la domanda seguente: che cosa è la teoria del *Big Bang* o, più in generale, una teoria fisica?

Potremmo rispondere: è un insieme di strumenti matematici capaci di spiegare il dato sperimentale[10]. Ma qual è il dato sperimentale nel caso in oggetto? Com'è noto, è quello che vedono i nostri apparecchi (anche quelli in orbita, come il satellite Planck), perché - essendo la velocità della luce costante - essi ricevono ora l'immagine di eventi primordiali.

Ecco un aspetto interessante: che la velocità della luce sia costante è una nostra ipotesi teorica, come lo è (più in generale) supporre che le costanti universali stimate oggidì siano costanti non solo nello spazio (odierno) ma anche nel passato e nel futuro. Non sarà che gli apparecchi vedono quel che la nostra teoria immagina?

Eppure, se la nostra fisica fosse tutta immaginazione, come saremmo riusciti a mettere in orbita con successo il satellite Planck? Qualcosa di vero del cosmo, almeno a certi livelli, i nostri strumenti matematici devono pur cogliere.

Quel che intendo sottolineare con l'esempio del *Big Bang* è che ogni nostra acquisizione fisica è un'inscindibile miscela di teoria matematica ed evidenza sperimentale, miscela resa possibile da un apparato tecnico, anch'esso matematicamente connotato[11].

La parola miscela allude anche a un altro aspetto importante: se una qualunque singola previsione teorica viene contraddetta a livello sperimentale, non è per niente facile risalire alla parte del modello che richiede una correzione.

La fisica contemporanea è un sofisticato tentativo matematizzato di comprensione della realtà cosmica, altamente corroborato dal successo tecnico che lo accompagna, ma pur sempre suscettibile di perfezionamento, di revisione e forse, in futuro, di abbandono a favore di un tentativo più soddisfacente. L'universo non accetta supinamente i nostri schemi interpretativi, come mostrano i tanti esperimenti

---

8. Una breve considerazione sul concetto di macchina cui mi riferisco nelle righe precedenti. Tradizionalmente "macchina" è in essenza ogni congegno da noi predeterminato a uno scopo (potrebbe essere anche un congegno microbiologico). Più di recente nella storia umana sono comparse le macchine cibernetiche, capaci anche di reagire all'ambiente, e le macchine logiche, capaci anche di elaborare informazione.
9. La teoria fu proposta per la prima volta nel 1927 dall'astronomo Georges Lemaître (1894-1966), il quale tuttavia non parlava di *Big Bang* bensì di "atomo primitivo"; fu l'altro astronomo Fred Hoyle (1915-2001), che non condivideva la proposta, a tentare di ridicolizzarla in una trasmissione radiofonica riferendosi ad essa con la locuzione ora in uso (ma Hoyle negò poi ogni intento spregiativo). Oltre che uno scienziato, Lemaître era anche un prete cattolico, mentre Hoyle era anche uno scrittore di fantascienza.
10. È evidente la nebulosità del concetto di "spiegazione", ma su questo si veda oltre.
11. Il premio Nobel Paul Dirac (1902-1984) giunse a scrivere che è più importante che le equazioni della fisica siano matematicamente belle piuttosto che in accordo con gli esperimenti. Si veda l'antologia di suoi saggi intitolata *La bellezza come metodo*, a cura di V. Barone, uscita nel 2013 presso Indiana Editrice.

CENTRO INTERNAZIONALE DI STUDI ROSMINIANI – VILLA DUCALE, CORSO UMBERTO I, n. 15
28838 STRESA VB (ITALIA) – C.F. 81000230067 – TEL. 0323 30091 - FAX 0323 31623 E–mail: simposi.rosminiani@rosmini.it

che hanno smentito pur brillanti ipotesi teoriche: è come se il cosmo dialogasse con noi[12].

Si presentano qui alcuni quesiti conseguenti.

(1) Chi decide se una teoria scientifica è (al momento) soddisfacente?

(2) Il mondo è retto proprio da quelle leggi matematiche, come sosteneva Galileo Galilei (invocando il decreto del Creatore), oppure quelle teorie matematizzate così efficaci sono solo una proiezione della nostra mente, capace di indurre un ordine nell'esperienza?

(3) Quale valore ha il cosiddetto principio antropico?

Per quanto riguarda (1), si potrebbe dire sbrigativamente che la decisione spetta ai competenti, cioè ai fisici e ai cultori di altre discipline pertinenti. Tuttavia va ricordato che la comunità scientifica non è un monolite e che moltissimo è stato scritto negli ultimi decenni a proposito delle numerose sfaccettature della sua vita interna[13]. Una teoria scientifica soddisfacente agli occhi dei competenti, poi, specialmente quando richiede ingenti investimenti collettivi per essere approfondita e sviluppata, può incontrare legittime resistenze nel contesto sociale, tanto più se esso, per le ragioni più varie, non è sensibile al valore intrinseco di una conoscenza disinteressata (scientifica o meno)[14].

Per quanto riguarda (2), la consapevolezza odierna della complessità della realtà rende tutt'altro che scontata l'idea che il mondo sia scritto in un linguaggio matematico (tuttavia, ad esempio, Dirac era su questa posizione), ma se si accetta l'altro punto di vista non è facile spiegarsi il successo storico che ha indubbiamente avuto la matematizzazione della fisica. Al punto che si è parlato di "irragionevole" efficacia della matematica nelle scienze naturali e nell'ingegneria[15].

Per quanto riguarda (3), esistono del principio antropico diverse versioni, più o meno sfumate. L'idea di partenza è la constatazione che piccole variazioni nel valore delle costanti fondamentali dell'universo sarebbero incompatibili con l'esistenza della vita cosciente come noi la conosciamo. E a questa constatazione si ferma la versione "debole". La versione "forte" del principio afferma invece che i valori delle costanti sono proprio quelli perché il cosmo *doveva*, in qualche senso, far emergere al proprio interno vita intelligente e consapevole!

Parlando della fisica come tentativo umano di comprensione della realtà cosmica ho finora, almeno implicitamente, considerato distinto l'osservatore umano dall'osservato naturale, ma questo non è del tutto corretto, specialmente nel caso della fisica del microcosmo: la meccanica quantistica è una teoria che descrive in modo inestricabile l'interazione tra osservatore e osservato, utilizzando uno strumentario probabilistico verosimilmente irrinunciabile[16].

---

12. Persino sul *Big Bang* stiamo dialogando: gli studi che hanno reso così celebre il bosone di Higgs mirano proprio a ricreare condizioni analoghe a quelle del *Big Bang*.

13. Mi riferisco in primo luogo al lavoro di Thomas Kuhn (1922-1996) e in particolare al suo testo più celebre: *La struttura delle rivoluzioni scientifiche* (1962 e 1970). La traduzione italiana della seconda edizione è uscita nel 1979 presso Einaudi.

14. A parte quanto già osservato nella nota 4, sono noti ad esempio gli effetti propulsori o inibitori della ricerca scientifica prodotti da talune concezioni religiose o ideali.

15. C'è qui una duplice allusione. La prima è al notissimo articolo del premio Nobel Eugene Wigner (1902-1995) intitolato "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", *Communications in Pure and Applied Mathematics* 13 (1960). La seconda allusione è all'articolo del famoso matematico industriale Richard Hamming (1915-1988) intitolato "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics", *The American Mathematical Monthly* 87 (1980).

16. Alcuni sono disturbati dalla irrinunciabilità di questo strumentario probabilistico, ritenendo che implichi ammettere un che di indeterministico in un cosmo che in epoche passate era piuttosto pensato come un portentoso analogo dei nostri orologi meccanici. A parte che, matematicamente, un fenomeno aleatorio può essere indifferentemente il prodotto sia di una realtà deterministica che di una realtà intrinsecamente aleatoria (qualunque cosa questo significhi), immagino che non sarebbe sorprendente se nel XXI secolo la nostra visione del mondo dovesse superare lo stadio della orologeria meccanica.

Centro Internazionale di Studi Rosminiani – Villa Ducale, Corso Umberto I, n. 15
28838 Stresa VB (Italia) – C.F. 81000230067 – TEL. 0323 30091 - FAX 0323 31623 E–mail: simposi.rosminiani@rosmini.it

Penso interessante, concettualmente, osservare che l'attuale comprensione fisica del microcosmo non è di tipo continuo, bensì di tipo discreto, nel senso che si ipotizza che alcune variabili in gioco non varino con continuità, bensì "a salti". Abbiamo quindi nella fisica contemporanea (e nella corrispondente matematica) una pluralità di approcci, talvolta sovrapponentisi e non facilmente raccordabili. Ciò in analogia con quanto avviene quando una stessa porzione di realtà è oggetto d'indagine da parte di diverse discipline (ad esempio la fisica e la chimica). Tradizionalmente è molto avvertito il desiderio di conseguire una qualche unificazione dei punti di vista, magari vagheggiando una gerarchia tra di essi (ad esempio, la fisica come base della chimica). Ma non è detto che questo sia possibile o persino augurabile[17].

La rilevanza di un approccio discreto alla fisica del microcosmo, combinata con la natura discreta dell'elaborazione elettronica, ormai così pervasiva in tanti ambiti, ha persino condotto alcuni a proporre che il cosmo possa essere descritto come un unico immenso automa cellulare.

Un automa cellulare è un particolare tipo di sistema dinamico discreto, cioè una particolare funzione matematica che modella l'evoluzione d'un sistema al mutare d'una variabile "temporale" la quale non evolve in modo continuo, bensì "a salti". Famoso automa cellulare è *Game of Life*[18], in cui ognuno degli stati del sistema è identificato con una distribuzione finita di caselle nere su una tabella bidimensionale infinita di caselle altrimenti bianche (ogni casella essendo individuata da una coppia di numeri interi). La legge di evoluzione del sistema dice semplicemente che:

(a) se una casella bianca ha esattamente tre vicine nere, allora diventa nera,
(b) se una casella nera ha due o tre vicine nere, allora rimane nera,
(c) in tutti gli altri casi la casella (bianca o nera che sia) diventa bianca;

qui per casella vicina alla casella C si intende ognuna delle otto caselle V del disegno seguente:

V	V	V
V	C	V
V	V	V

Si dimostra che, nonostante la sua semplicità, *Game of Life* è in grado di simulare ogni calcolatore.

Come ho già scritto sopra, attualmente il ruolo della matematica nelle scienze diverse dalla fisica è meno dominante, ma comunque spesso significativo[19]. Non mi sembra tuttavia che ne emergano paradigmi concettuali radicalmente diversi da quelli esplorati parlando di applicazioni della matematica alla fisica. Mi limito quindi a un rapido cenno ai fondamenti matematici e fisici delle tecniche di neuro-immagine.

Com'è noto, si tratta di tecniche usate per studiare il funzionamento del cervello, spesso con l'obbiettivo di comprendere il legame tra specifiche funzioni mentali e l'attivazione di certe aree cerebrali. Naturalmente la correlazione tra le due cose non implica di per sé un rapporto di causa ed effetto, anche se oggi si tende a fare un po' di confusione. Inoltre concepire la mente in isolamento da ogni dinamica di relazione e concepire l'attività cerebrale indipendentemente dal resto del corpo, come spesso si fa, sembrano a taluni ipotesi poco realistiche.

---

17. Si veda ad esempio il recente libro: S. Chibbaro, L. Rondoni, and A. Vulpiani, *Reductionism, Emergence and Levels of Reality – The Importance of Being Borderline*, Springer 2014.

18. *Game of Life* fu ideato dal matematico J. H. Conway (1937–) alla fine degli anni Sessanta del secolo scorso, muovendosi all'interno di un contesto inaugurato una ventina di anni prima dal grande matematico e fisico J. von Neumann (1903-1957).

19. Per dirne una, proprio la nozione di automa cellulare è impiegata anche in biologia per simulare comportamenti cellulari (ad esempio, neuronali), per descrivere forme e meccanismi presenti in piante e animali, etc.

Centro Internazionale di Studi Rosminiani – Villa Ducale, Corso Umberto I, n. 15
28838 Stresa VB (Italia) – C.F. 81000230067 – TEL. 0323 30091 - FAX 0323 31623 E–mail: simposi.rosminiani@rosmini.it

I fondamenti matematici e fisici delle tecniche di neuro-immagine sono rilevabili già dai termini che compaiono in un sommario elenco di alcuni dei metodi più diffusi:

EEG (multichannel Electroencephalography)

fMRI (functional Magnetic Resonance Imaging)

MEG (Magneto Encephalography)

PET (Positron Emission Tomography)

SPECT (Single Photon Emission Computed Tomography).

Ogni indagine "tomografica" è basata su una teoria matematica chiamata *analisi armonica*, "positrone" e "fotone" appartengono alla meccanica quantistica, l'elettromagnetismo è un ben noto settore della fisica classica.

Più in profondità, poiché interessa lo studio delle correlazioni tra distinte aree cerebrali, essendo molta attività neurale svolta da una rete integrata di regioni differenti, occorre svolgere un'accurata analisi statistica per distinguere tra di loro le diverse sorgenti di attivazione.

In sintesi, il punto è che le neuro-scienze sono anch'esse un'inscindibile miscela di teoria e di evidenza.

* * * * *

Mi accingo adesso a trattare, sia pur sommariamente, del rapporto tra matematica e natura umana.

Si potrebbe esordire dicendo che la matematica è un'abitudine del pensiero umano. L'affermazione è ricalcata su una frase presente in una lettera che Pavel Florenskij scrisse dal *lager* alla figlia Olga nel 1933: «La matematica non deve essere nella mente come un peso ma come una abitudine del pensiero: bisogna imparare a vedere i rapporti geometrici in tutta la realtà e a individuare le formule in tutti i fenomeni»[20]. Ma come si manifesta questa abitudine di pensiero? In altre parole, in che cosa consiste la matematica?

Invece di tentare una (difficile) definizione formale, assumiamo con Florenskij che qualunque idea di matematica debba avere a che fare con numeri, geometria e "formule", che interpreto come capacità di (lunghe) catene deduttive, del tipo: se questo, allora quello; se quello, allora ancora quell'altro; etc. Come nel caso della specie umana, la matematica è molto antica e non conosciamo la sua data di nascita. Possiamo tuttavia immaginare che *homo sapiens sapiens* abbia contato fin dall'inizio. Ci sono evidenze che anche alcuni animali non umani distinguano tra uno e molti. Attenzione però: il concetto del numero 3 (ad esempio) è un'astrazione mentale tipica dell'animale umano, favorita - immagino - dall'incontro con tre pecore, tre alberi, tre montagne e così via; così come c'è un processo di astrazione nel riconoscere un segmento guardando un bastoncino[21]. Questo processo di astrazione (che caratterizza anche altre dimensioni dell'essere umano) è davvero formidabile, sebbene oggi ci paia scontato, tanto è vero che i numeri 1, 2, 3, … sono chiamati numeri "naturali".

Quanto alle prime esperienze geometriche di *homo sapiens sapiens*, al di là di segmenti e bastoncini, è molto rilevante a mio parere la ben nota propensione estetica dei nostri remoti progenitori. Anche utensili di uso quotidiano recavano di frequente decorazioni geometriche, che è difficile attribuire a una

20. Pavel Florenskij (1882-1937) fu matematico, teologo, prete ortodosso e molto altro (nel mondo russo venne definito il Leonardo del Novecento). Ho tratto la frase dal libro seguente, cui rinvio per approfondimenti: RENATO BETTI, *La matematica come abitudine del pensiero – Le idee scientifiche di Pavel Florenskij*, Università Commerciale Luigi Bocconi, 2009.

21. Alludo qui al testo: L. RUSSO, *Segmenti e bastoncini*, Feltrinelli, 1998. In esso, tra l'altro, si paventa che alcuni modi d'insegnare la matematica nella scuola primaria tendano a inibire, più che favorire, la capacità di astrazione.

CENTRO INTERNAZIONALE DI STUDI ROSMINIANI – VILLA DUCALE, CORSO UMBERTO I, n. 15
28838 STRESA VB (ITALIA) – C.F. 81000230067 – TEL. 0323 30091 - FAX 0323 31623 E–mail: simposi.rosminiani@rosmini.it

qualsiasi esigenza di funzionalità. In effetti l'estetica è anche uno dei motori della matematica di ogni epoca.

Con il passare del tempo, ai numeri naturali si sono aggiunte le frazioni, forse confrontando due grandezze geometriche che non erano l'una multiplo intero dell'altra. Ora i numeri naturali non sono tanto interessanti in se stessi, quanto perché si possono sommare e moltiplicare. Quindi tali operazioni sono state estese alle frazioni. Ma con le frazioni si compie un salto concettuale: mentre tra un numero naturale e il suo successivo non ci sono altri numeri naturali, comunque prese due frazioni esistono sempre infinite frazioni intermedie.

È attribuita a Pitagora[22] la sconvolgente scoperta che esistono coppie di grandezze il cui rapporto non si può esprimere con una frazione. A dire il vero, non è ovvio a priori che ogni rapporto di grandezze debba essere espresso da un numero, ma, se poniamo il numero a fondamento di ogni spiegazione del mondo, si può ben capire lo sconvolgimento di Pitagora. Come tutti sappiamo, il problema è risolto (alquanto tempo dopo) introducendo una nuova categoria di numeri, i numeri irrazionali (quelli non esprimibili come *ratio*, cioè quoziente, di numeri interi), ad esempio $\sqrt{2}$, che corrisponde al rapporto tra la diagonale di un quadrato e il lato del medesimo; ed estendendo con opportuni aggiustamenti le vecchie operazioni a questi nuovi numeri. I Greci rimasero probabilmente alquanto diffidenti, tuttavia, se consideriamo il fatto, curioso ai nostri occhi, che negli *Elementi* di Euclide, una sorta di *summa* ellenistica di secoli di matematica greca, alcune tematiche che noi riteniamo algebriche siano parte di una trattazione rigorosamente geometrica[23].

A un altro gigante dell'epoca ellenistica, Archimede[24], è dovuta l'introduzione di un diverso genere di numero irrazionale, quello ancora oggi chiamato "pi greco", in connessione con il rapporto tra una circonferenza e il suo diametro. La differenza tra $\sqrt{2}$ e pi greco è che, pur essendo ambedue irrazionali, l'uno si può ottenere come soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti interi (ad esempio $x^2 - 2 = 0$), l'altro no. La dimostrazione fornita da Archimede dell'esistenza del "numero" pi greco è alquanto sottile, anche per gli studenti contemporanei penso.

Ci vuole del tempo per l'introduzione dei numeri negativi e dello zero, ma essi sono oramai ben noti nel 1202, quando Leonardo da Pisa scrive il suo *Liber Abbaci*[25]. Chi ne scorresse le pagine, tuttavia, troverebbe che la pur avanzata (relativamente parlando) algebra ivi contenuta è ancora un'algebra *retorica*, com'è stato detto, nel senso che manca l'apparato simbolico cui siamo avvezzi; ad esempio, l'equazione $x^2 - 4 = 0$ viene scritta: "trova la cosa il cui censo è 4". Qui la "cosa" è l'incognita e il quadrato dell'incognita è chiamato "censo". L'acquisizione del simbolismo matematico è stato un laborioso processo dei secoli più recenti e ha certamente contribuito a un ulteriore salto concettuale, giovando grandemente allo sviluppo della disciplina.

Le frazioni positive e negative (interi inclusi), lo zero e i numeri irrazionali positivi e negativi costituiscono l'insieme dei numeri "reali", posto in corrispondenza biunivoca con i punti della retta geometrica (una retta infinita da ambedue i lati). I numeri reali sono considerati oggi del tutto familiari, ma una loro soddisfacente sistemazione formale risale solo alla metà del XIX secolo.

---

22. Pitagora (circa 570 a.C. - 495 a.C.), nato a Samo e morto a Metaponto, fondò nell'Italia meridionale una scuola iniziatica che riteneva il numero alla base di ogni spiegazione del mondo. Non è chiaro se fosse un matematico.
23. Di Euclide, nonostante la grande fama che lo accompagna, si sa molto poco. Si suppone che abbia operato nel celebre Museo di Alessandria durante il regno di Tolomeo I (323 a.C. - 283 a.C.).
24. Archimede (circa 287 a.C. - 212 a.C.), siracusano, mente matematica, scientifica e ingegneristica, è stato probabilmente uno dei grandi geni dell'umanità.
25. Leonardo da Pisa (circa 1170-1240), soprannominato Fibonacci nell'Ottocento, fu matematico e mercante. Grande viaggiatore, raccolse nel *Liber Abbaci* la tradizione matematica dell'area mediterranea (e non solo). Fu anche una mente creativa, come testimoniano sia parti del *Liber Abbaci* che altre sue opere scientifiche.

CENTRO INTERNAZIONALE DI STUDI ROSMINIANI – VILLA DUCALE, CORSO UMBERTO I, n. 15
28838 STRESA VB (ITALIA) – C.F. 81000230067 – TEL. 0323 30091 - FAX 0323 31623 E–mail: simposi.rosminiani@rosmini.it

Accanto ai numeri *reali* si usano anche i numeri *immaginari*. Essi sono introdotti a partire dal Rinascimento, prima come artifici di calcolo, poi come veri e propri numeri (sia pur particolari, come mostra la parola prescelta per indicarli), nell'ambito degli studi sulle soluzioni delle equazioni polinomiali reali, equazioni talvolta prive di soluzioni reali. Ad esempio, $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali perché il quadrato di un numero reale è sempre non negativo. Si ricorre allora a due opportuni numeri "immaginari", *i* e il suo opposto *–i* (*i* sta ovviamente per immaginario), il cui quadrato sia – 1. In altre parole, *i* corrisponde a $\sqrt{-1}$ e *–i* corrisponde a $-\sqrt{-1}$. Più in generale, si considera l'insieme *C* dei numeri "complessi" della forma *a+ib* (dove *i* è come sopra mentre *a* e *b* variano tra tutti i numeri reali) e si constata che a *C* si possono estendere le consuete quattro operazioni dei numeri reali (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione). La cosa bella è che non solo i numeri complessi contengono le soluzioni di *tutte* le equazioni polinomiali a coefficienti reali e complessi, non solo essi recano sorprendentemente alcune profonde informazioni sugli stessi numeri naturali[26], ma i numeri complessi svolgono un ruolo fondamentale anche al di fuori della matematica pura, dalla elettrotecnica fino alla meccanica quantistica.

A fine Ottocento ancora un'altra evoluzione del concetto di numero, nel senso che si comincia a operare su insiemi di numeri come se essi stessi fossero in qualche senso dei numeri. Ad esempio, il fatto che in qualche "estensione" *E* dei numeri interi la fattorizzazione in primi non sia unica (a differenza di quello che accade nei numeri interi) conduce alla nozione di "ideale" (abbreviazione per "numero ideale"), un sottoinsieme infinito di *E* che può essere moltiplicato per altri ideali, in maniera tale che - per gl'ideali - valga la fattorizzazione unica.

Quest'ultimo sviluppo va visto in parallelo con l'affermarsi della teoria degl'insiemi e dell'aritmetica "transfinita" (quella relativa a insiemi infiniti), che rappresentano, in particolare, la definitiva accettazione in matematica del concetto di infinito attuale[27].

Cerchiamo di capire la lezione che emerge da questa parzialissima cavalcata nella storia della matematica. La lezione è che un tratto distintivo della matematica è la continua estrapolazione, a partire da concetti noti, di idee innovative e ben più generali. Il processo di estrapolazione richiede spesso una rivisitazione del patrimonio noto, ad esempio riconoscendo per i vecchi teoremi ipotesi prima implicite, ovvero rielaborandone le dimostrazioni. Tuttavia generalmente gli enunciati dei vecchi teoremi non cambiano, il che contribuisce alla stabilità storica della disciplina. Ad esempio, gli *Elementi* di Euclide sono stati completamente "riscritti" da Hilbert per adeguarli ai canoni di rigore contemporanei, ma gli enunciati dei teoremi sono rimasti gli stessi[28]. I canoni di rigore infatti mutano nel tempo con la disciplina, al fine di consentire la trattazione efficace delle nuove idee e dei nuovi teoremi. La matematica è in continua evoluzione ed è incessantemente modificata e perfezionata dagli esseri umani, sia per esigenze interne (ad esempio logiche e estetiche), sia per esigenze esterne (ad esempio applicative)[29].

In che senso allora si possono riferire alla matematica termini tradizionali come certezza, esattezza, precisione e simili?

Osserviamo anzitutto che non si tratta di sinonimi. Potremmo dire che la matematica non è esatta, perché alcuni suoi rami interessanti si occupano proprio di situazioni in cui l'esattezza è impossibile, ma

26. Ho in mente la funzione *zeta*, definita sui numeri complessi ma utilizzata per studiare la distribuzione asintotica dei numeri primi.

27. Il nome d'obbligo qui è quello di Georg Cantor (1845-1918), considerato il padre della teoria degli insiemi. Egli ritiene che ogni infinito potenziale presupponga logicamente un infinito attuale e ciò lo conduce ad elaborare una aritmetica degli insiemi infiniti.

28. David Hilbert (1862-1943) è stato un matematico geniale e molto influente a livello internazionale.

29. È noto che sulla matematica esistono (almeno) due concezioni: la matematica si *scopre* oppure la matematica si *inventa*. Mi sembra che quel che ho appena scritto sia compatibile con ognuna delle due posizioni: la matematica evolve nel senso che se ne scopre / inventa di nuova e si capisce meglio quella già nota.

CENTRO INTERNAZIONALE DI STUDI ROSMINIANI – VILLA DUCALE, CORSO UMBERTO I, n. 15
28838 STRESA VB (ITALIA) – C.F. 81000230067 – TEL. 0323 30091 - FAX 0323 31623 E–mail: simposi.rosminiani@rosmini.it

questo nulla toglie alla precisione del procedimento e all'attendibilità delle conclusioni. Dipende poi dal senso attribuito alle parole. Se la certezza chiesta alla matematica è una certezza assoluta e universale (quale non si conosce, mi sembra, in nessun'altra dimensione umana), allora non direi che la matematica fornisca tale certezza[30].

Se invece parliamo di un'attendibilità fondata su una lunga tradizione storica di responsabilità e credibilità comunitarie, allora direi che la (comunità) matematica fornisce ragionevoli certezze, rappresentando ancora oggi un termine di paragone per le altre scienze. La certezza matematica, insomma, è più di tipo storico che logico[31].

Come si espresse lo stesso Nicolas Bourbaki[32] in un articolo del 1949: «La logica, per quanto concerne noi matematici, non è né più né meno che la grammatica del linguaggio che usiamo, un linguaggio che doveva esistere prima che la grammatica potesse essere costruita»[33].

E nulla è più storicamente connotato di un linguaggio!

Mi avvio alla conclusione di questa seconda parte con un'ulteriore domanda: com'è possibile che la matematica sia indigesta a tante persone, forse anche al mio lettore?

Il problema è avvertito in tutto il mondo e varie sono le azioni intraprese a livello scolastico e divulgativo per migliorare la situazione, perché nessuno ritiene che taluni possano essere costituzionalmente "non matematici" ed è convinzione generale che una dimestichezza con il pensiero matematico sia di giovamento al genere umano.

Qui ci aiuta di nuovo la frase di Florenskij, laddove dice: «bisogna imparare a vedere». Il pensare matematico non ci è dato senza fatica. Occorre invece educarcisi. Questo è vero di tante cose, ma forse per la matematica lo è ancora di più. Del resto la stessa parola "matematica" sembra provenire da una radice che significa «ciò che viene imparato»[34].

Quando si parla di apprendimento, il pensiero corre spontaneamente ai bambini. Orbene sono state fatte numerose indagini sull'apprendimento matematico in essi (particolarmente in quelli non ancora esposti all'esperienza scolastica, ritenuta talora fuorviante). Mi piace ricordare i famosi studi di Seymour Papert[35], condotti già decenni fa al laboratorio per l'intelligenza artificiale del *Massachusetts Institute of*

---

30. Probabilmente il programma, lanciato circa cento anni fa da Hilbert, di ridurre la matematica a un calcolo formale è quel che più si avvicina a questo ideale di certezza assoluta e universale per la matematica. Ma il programma di Hilbert è naufragato a seguito del lavoro di Kurt Gödel (1906-1978) e altri. Anche supponendo che gli oggetti matematici vivano di vita propria in qualche mondo delle idee, è "incerta" la nostra conoscenza di tale mondo. Questo non vuol dire tuttavia che il metodo assiomatico abbia perso interesse, tutt'altro. Al momento è considerato la maniera canonica con cui la comunità scientifica si comunica le nuove acquisizioni, in uno sforzo di rigore e trasparenza.
31. Due parole sulla comunità matematica. Non è composta solo da matematici professionisti, ma anche da tutti coloro (scienziati, ingegneri, etc.) che, per un motivo o per l'altro, fanno crescere la disciplina. Di più, non è limitata al tempo presente: anche se la comprensione stessa della disciplina è più volte mutata nei millenni, c'è una sorta di cameratismo tra i cultori di oggi e quelli del passato, dei quali leggiamo con piacere e profitto gli elaborati; c'è inoltre una notevole sollecitudine per le future generazioni, cui possa essere assicurata la fruizione di un così bel risultato dell'ingegno umano. Infine, ma non per importanza, è da sempre una comunità trans-nazionale; anche quando le varie tradizioni nazionali hanno caratteristiche peculiari, esse vengono avvertite come una ricchezza per tutti.
32. Nicolas Bourbaki è lo pseudonimo collettivo di alcuni brillanti matematici francesi che nel corso del Novecento (un secolo di crescita impetuosa della matematica, in ampiezza e profondità) hanno redatto una *summa* molto formale di ampie parti della matematica contemporanea.
33. La frase è a pagina 1 di "Foundations of Mathematics for the Working Mathematician", *Journal of Symbolic Logic* 14 (1949). La traduzione in italiano è mia. L'originale inglese è qui di seguito: «Logic, as far as we mathematicians are concerned, is no more and no less than the grammar of the language which we use, a language which had to exist before the grammar could be constructed».
34. Anche i linguaggi naturali devono essere appresi, quale che sia la predisposizione innata per essi.
35. Seymour Papert (1928–), sudafricano poi naturalizzato americano, matematico di formazione, si è molto occupato di pe-

CENTRO INTERNAZIONALE DI STUDI ROSMINIANI – VILLA DUCALE, CORSO UMBERTO I, n. 15
28838 STRESA VB (ITALIA) – C.F. 81000230067 – TEL. 0323 30091 - FAX 0323 31623 E–mail: simposi.rosminiani@rosmini.it

Technology – MIT. Con l'ausilio di una piattaforma espressamente indirizzata ai bimbi molto piccoli (incluso un apposito linguaggio di programmazione chiamato LOGO), è stata prodotta evidenza che «fin dai primi giorni di vita il bambino è impegnato nell'impresa di estrarre conoscenza matematica dall'interazione del suo corpo con l'ambiente»[36]. La citazione ha oltre trent'anni, ma non ha perso di attualità, anzi è oggi inseribile in un contesto di ulteriori acquisizioni che sottolineano come la mente umana non solo si avvalga del corpo ma sia costitutivamente "incorporata"[37].

Trovo davvero singolare che, dato un contesto del genere, abbiano poi larga diffusione posizioni che tendono a "separarci" dalla nostra corporeità, quasi che potessimo affrancarci dalla nostra appartenenza alla specie *homo sapiens sapiens*. Come quando si manifesta l'ambizione di artificializzare completamente il nostro neuro-apparato, quasi che il corpo fosse un mero tramite d'una non meglio specificata individualità monadica.

---

dagogia.

36. Mia traduzione di: «from the first days of life a child is engaged in an enterprise of extracting mathematical knowledge from the intersection of body with environment». La frase è a pagina 118 di: S. A. PAPERT, *The mathematical unconscious*, in *On Aesthetics in Science* (J. Wechsler, ed.), The MIT Press, 1981. L'articolo tratta del rapporto tra matematica ed estetica e tra matematica e inconscio, concludendo con l'idea che la matematica sia "corpo-sintonica" e che la matematica e *homo sapiens sapiens* non possano essere compresi indipendentemente l'una dall'altro.

37. La teoria della cosiddetta "mente incorporata" è tutt'altro che unitaria e suscita l'interesse di scienziati e ingegneri, oltre che di cognitivisti, filosofi, linguisti e psicologi. A parte le varie sfaccettature, e alcuni estremismi, sottolinea un legame costitutivo tra le funzioni mentali superiori e l'interazione del corpo con l'ambiente.

CENTRO INTERNAZIONALE DI STUDI ROSMINIANI – VILLA DUCALE, CORSO UMBERTO I, n. 15
28838 STRESA VB (ITALIA) – C.F. 81000230067 – TEL. 0323 30091 - FAX 0323 31623 E–mail: simposi.rosminiani@rosmini.it